مقارنة توزيع فرجيت والتوزيع الاسي لتقدير دالة المعولية التقريبية لاوقات الفشل لجهاز الماموجرام

مهدي وهاب نعمة نصر الله، محمد حسين كاظم العدال

كلية الادارة والاقتصاد، جامعة كربلاء، كربلاء، العراق
Mahdi.na2002@yahoo.com, mohamedal10@gmail.com

المستخلص. تم في هذه البحث تقدير المعولية التقريبية لتوزيع فريچت في حالة احتواء البيانات على k قيم ملـوثة (شاذة) تنشأ من انحراف القيم الاصلية للبيانات عن توزيعها الاساسي باستعمال نموذج الشواذ لـ Dixit الذي سيتم استخدامه في ايجاد التوزيع المشترك للبيانات في حال احتوائها على شواذ ، لذلك تم استعمال توزيع فريچت كتوزيع اصلي للبيانات وتم تلويث البيانات الأساسية بـ k من القيم تتبع التوزيع الأسي وتم تقدير معلمات توزيع فريچت باستعمال طريقة الامكان الاعظم وطريقة العزوم وطريقة العزوم الخطية لتقدير معلمات التوزيع في كلا الحالتين ومن ثم تعويض تقديرات تلك الطرائق في دالة معولية توزيع فريچت للحصول على المعولية التقريبية للتوزيع، ومن ثم المقارنة بين طرائق التقدير باستعمل معايير متوسط مربعات الخطأ التكاملي وتم التوصل الى افضل طريقة لتقدير دالة المعولية التقريبية في ظل وجود بيانات ملوثة هي طريقة الامكان الاعظم بنسبة افضلية ٣٤ % عندما يكون التوزيع الملوث اسي، تليها طريقة العزوم بنسبة افضلية ١٦% عندما يكون التوزيع الملوث اسي. وان المعولية المقدرة بطريقة الامكان الاعظم عندما يكون التوزيع الملوث أسي تمتلك اقل متوسط مربعات خطأ تكامل ولكن الفارق قليل جداً لكل تجارب المحاكاة.و المعولية المقدرة بطريقة الامكان الاعظم تقترب اكثر من المعولية الحقيقية من طريقة العزوم وطريقة العزوم الخطية ، حيث سجلت طريقة العزوم افضلية عن باقي الطرائق لبعض تجارب المحاكاة . وان طريقة الامكان الاعظم اكثر ملائمة للبيانات الحقيقية التي تمثل اوقات الفشل لجهاز الماموجرام الذي يستعمل للكشف عن سرطان الثدي.

الكلمات المفتاحية: التوزيع الاسي، توزيع فريچت، المعولية التقريبية، جهاز الماموجرام.

Abstract. In this paper, the approximate reliability of the frit distribution was estimated in the event that the data contains k contaminated (anomalous) values that arise from the deviation of the original values of the data from their primary distribution by using the anomaly model of Dixit, which will be used to find a common distribution of data in the event that it contains an anomaly, and therefore The use of the Ferrite distribution as the original distribution of the data and the basic data were contaminated with k of the values following the exponential distribution. The parameters of the Ferrite distribution were estimated using the greatest possible method and the placement method and the linear placement method to estimate the distribution parameters in both cases, and then offset the estimates of those methods in Reliability distribution function freit to get the approximate reliability of the distribution, and then compare the estimation methods using the criteria of the average integral error squares and the best way to estimate the approximate reliability function in the presence of contaminated data is the greatest possible method with a 34% preference when the contaminated distribution is exponential, This is followed by the placement method with a preference rate of 16% when the contaminated distribution is exponential. The estimated reliability by the greatest possible method when the contaminated distribution is exponential has the lowest average squares of integration error, but the difference is very small for all simulation experiments. The estimated reliability by the greatest possible method is closer to the real reliability than the placement method and the linear placement method, where the placement method was recorded as preferable to the rest Methods for some simulation experiments. And the greatest possible method is more suitable for real data, which represents the failure times for the mammogram, which is used to detect breast cancer.

Keywords: Exponential Distribution, Freight Distribution, Approximate Reliability, Mammogram Device.

١ المقدمة

يعد اكتشاف المشاهدات البعيدة (الملوثات) امراً مهما إما لان تلك الشواذ نفسها تكون مهمة بحد ذاتها ، او ان المجرب يريد منع الشواذ (الملوثات) للظهور في التقديرات المطلوبة. وقد تنامى في الوقت الحالي استعمال الطرائق الحصينة Robust Method للتخفيف من اثر الشواذ على البيانات والتي تستعمل بكثرة في النماذج الخطية ، ولكن عندما يكون النموذج تحت الدراسة غير خطي وفيه درجة من التعقيد قد لاتؤدي تلك الطرائق الحصية المطلوب منها ، اضافة الى ان الطرائق الحصينة تعد استراتيجيات وطرائق قائمة بحد ذاتها لاتعتمد على التوزيع الأصلي للبيانات ، مع انها لها فعالية في ايجاد تقديرات كفوءة لمعلمات التوزيع.

١.١ مشكلة البحث

استعمال المقدرات التقليدية لبيانات تحتوي على قيم ملوثة يعد مشكلة حقيقية وذلك لعدم كفاءة هذه المقدرات، وللتخلص من هذه المشكلة يجب الاستقصاء والبحث عن طرائق لتنقية تلك البيانات من الشواذ (الملوثات) اولاً ، ثم اجراء التقدير لغرض الوصول الى تقديرات كفوءة للمعلمات المقدرة ومن ثم الى تقدير كفوء لدالة المعولية.

٢.١ هدف البحث

يهدف البحث تقدير معلمات توزيع فريچت باستعمال طريقة الامكان الاعظم وطريقة العزوم لتقدير معلمات التوزيع،ومن ثم تعويض تقديرات تلك الطرائق في دالة معولية توزيع فريچت للحصول على المعولية التقريبية للتوزيع، ومن ثم المقارنة بين طرائق التقدير باستعمل معايير متوسط مربعات الخطأ التكاملي IMSE .

٢ تمهيد

كثيراً من الدراسات تناولت موضع احتواء البيانات قيم شاذة (ملوثة) في ظل تطبيق الطرائق الحصينة في التقدير، ولكننا سنقوم باستعمال طريقة لم يتم التطرق اليها من قبل في معالجة مشكلة الملوثات وهي تقدير معولية توزيع فرجيت . لذا في هذا الفصل سيتم مناقشة مفهوم البيانات الملوثة وبعض المفاهيم الاساسية في نظرية المعولية وكذلك التعريف بطرائق التقدير التي سيتم استعمالها في هذه البحث في تقدير دالة المعولية في حال وجود قيم شاذة في البيانات.

١.٢ البيانات المُلَوثة (الشاذة)

هي عنصر خارج عن النسق المميز للمجموعة وتعرف المشاهدة الشاذة (الملوثة) إحصائياً بأنها المُشاهدة المتأتية من مجتمع مختلف عن المجتمع قيد البحث. أي أن المجتمع الأصلي تم تلويثه بمشاهدات من مجتمع أخر وتُسمى هذه المُشاهدات بالملوثات (Contaminants). (الياسري: ٢٠٠٧ :P:6) (هبة الله : ٢٠٠٥ P:4). والقيم الشاذة مشاهدات تنحرف كثيراً عن المشاهدات الاخرى وهي مولدة بطريقة مختلفة عن طريقة توليد المشاهدات الاصلية) .
(Hekimoglu & Erenoglu , 2013:PP419-421).

٢.٢ دالة الكثافة الاحتمالية للفشل

وهي احتمالية فشل أو توقف الوحدة عن العمل خلال المدة $(t < T < t + \Delta t)$ بغض النظر عن قيمة Δt باعتبار T متغير عشوائي موجب ويمكن التعبير عنها رياضياً كما يأتي:

$$f_T(t) = lim_{\Delta t\to 0}\frac{p_r(t<T<t+\Delta t)}{\Delta t}\;;\; t \geq 0 \qquad (1)$$

٣.٢ دالة الكثافة التجميعية للفشل

احتمال فشل أو توقف الوحدة عن العمل حتى الوقت t ويعبر عنها رياضياً كما يأتي:(Rousseau: 2016 P:41)

$$F_T(t) = p_r(T < t) = \int_0^t f(u)du \;\; ; t \geq 0 \qquad (2)$$

والتي يطلق عليها دالة الاحتمال التجميعي للفشل حتى الوقت t. وهي دالة متزايدة غير متناقصة عن اي وقت من اوقات الفشل.

٤.٢ دالة المعولية

هي الدالة احتمالية متمثلة للدالة التجميعية ولذلك فان قيمتها اقل او تساوي ، على افتراض أن الشيء الأساسي الذي يتم قياسه لا يتغير. (Stapelberg: 2009 P43-45) ويعبر عنها رياضياً كالاتي(Iyer: 2013 P:13) :

$$R_T(t) = P(T \geq t) = \int_t^\infty f_T(y)dx = 1 - \int_0^t f_T(z)dz = 1 - F_T(t) \qquad (3)$$

٥.٢ التوزيع الأسي

توزيع احتمالي مستمر أشتق اسمه من الدالة الأسية. ويستعمل هذا التوزيع في تخمين الفترات الزمنية بين وقوع الأحداث . عادة ما يستخدم التوزيع الأسي في مسائل متعلقة بقياس الزمن. من ذلك مدة خدمة شباك البريد ، مدة تصليح آلة. في العلوم الدقيقة يستخدم التوزيع الأسي لتمثيل مدة حياة الذرات المشعة قبل أن تتفكك. وهو حالة خاصة من توزيع ويبل عندما تكون $\alpha = 1$ فتكون دالة الكثافة الاحتمالية للتوزيع الأسي بالشكل الآتي :

$$g(y,\alpha,\lambda) = \lambda e^{-\lambda y} \quad ; \qquad y > 0 \qquad (4)$$

اذا كان $y\sim\exp(\lambda)$, فان دالة التوزيع التراكمية Cumulative Distribution Function لها تكون :
(Ross,2009:P176:180)

$$F(y,\alpha,\lambda) = P(Y \leq y) = \int_0^y f(u)du = 1 - e^{-\lambda y} \; ; \;\; y \geq 0 \qquad (5)$$

$$Var(X) = \frac{1}{\lambda^2} \qquad (6)$$

٦.٢ توزيع فريچت

يعد توزيع فريچت من توزيعات ازمنة الحياة Lifetime models وتم تقديم هذا التوزيع من قبل عالم الرياضيات الفرنسي Maurice Frechet (١٨٢٨-١٩٧٣). ويستخدم في نمذجة معدلات الفشل والتي هي شائعة الاستعمال في دراسة المعولية Reliability وكذلك لقياس قوة التحمل لاحد المكونات , وهو من التوزيعات المناسبة للملائمة الجيدة لعينات البقاء على قيد الحياة ، ولوصف ظاهرة تدهور المكونات الميكانيكية كما في المكونات الديناميكية لمكائن الديزل.

(A.Loganathan & M.Uma:2017 P83-84;Kersey: 2010 P:8) .

اذا كان المتغير العشوائي y له توزيع ويبل Wiebull distribution ، فانه المتغير العشوائي $x = \frac{1}{y}$ له توزيع فريچت بدالة الكثافة الاحتمالية الاتية :

$$f(x,\alpha,\lambda) = \alpha\lambda\, x^{-(\alpha+1)}\, exp(-\lambda x^{-\alpha}) \;\;;\;\; x \geq 0\,;\, \alpha,\lambda > 0 \qquad (7)$$

وان $\alpha > 0$ معلمة الشكل Shape Parameter و $\lambda > 0$ معلمة القياس Scale Parameter ، وان x يمثل المتغير العشوائي الوقت لحين الفشل ويرمز لتوزيع فريچت بالرمز $Frechet(\alpha,\lambda)$ ، واذا كان $x \sim Frechet(\alpha,\lambda)$ ، فان دالة التوزيع التراكمية Cumulative Distribution Function له هي :

$$F(x,\alpha,\lambda) = P(X \leq x) = \int_0^x f(u)du = exp(-\lambda x^{-\alpha}) \;\;;\;\; x \geq 0 \qquad (8)$$

وان العزم ذو المرتبة (r) حول نقطة الاصل كالاتي:

$$EX^r = \int_0^\infty X^r f(x)dx = \lambda^{\frac{r}{\alpha}}\Gamma(1 - \frac{r}{\alpha}) \;\;;\; r=1,2,3,\ldots \qquad (9)$$

اذا كان $r > \alpha$ فان العزوم للتوزيع غير موجود, وعندما $0 < r \leq \alpha$ فان العزوم غير موجودة , وعندما يكون $0 < \alpha \leq 2$ فان العزوم موجودة ولكن التباين غير موجود كالاتي:

$$EX = \lambda^{\frac{1}{\alpha}}\Gamma(1 - \frac{1}{\alpha}) \qquad (10)$$

$$EX^2 = \lambda^{\frac{2}{\alpha}}\Gamma(1 - \frac{2}{\alpha}) \qquad (11)$$

$$Var(X) = \lambda^{\frac{2}{\alpha}}[\Gamma(1 - \frac{2}{\alpha}) - (\Gamma^2(1 - \frac{1}{\alpha}))] \qquad (12)$$

ان دالة المعولية Reliability Function للتوزيع كالاتي:

$$R(x) = \bar{F}(x) = \int_t^\infty f(x)dx = 1 - \exp(-\lambda x^{-\alpha}) \qquad (13)$$

A.Loganathan & M.Uma:2017 P83-84; Kersey: 2010 P:8; Kundu, & Howlader 2010 P1548).

(بشار, ٢٠١٨, ص ٢٣-٢٤).

٧.٢ نموذج الشواذ لـ Dixit

لتكن $X_1, X_2, \ldots\ldots, X_n$ متغيرات عشوائية تتبع توزيع معين وفق دالة كثافة إحتمالية $(x;\theta)$ ، ولنفرض ان هنالك (k) من تلك المشاهدات تشذ (Outlying) او تنحرف بعيداً عن التوزيع الأصلي للبيانات وتتبع توزيع آخر بدالة كثافة احتمالية $g(x;\theta)$ لذلك سيكون عدد المتغيرات العشوائية التي لها التوزيع الأصلي $(n-k)$ مشاهدة ، فأن التوزيع المشترك للبيانات في حالة وجود k من الشواذ وفقاً الى Dixit تكتب كالآتي:

$$f(X_1, X_2, \ldots\ldots, X_n;\theta) = C \prod_{j=1}^{n} f(x_j;\theta) \sum_{\underline{A}} \prod_{r=1}^{k} \frac{g(x_A;\theta)}{f(x_A;\theta)} \qquad (14)$$

إذ أن: $C = \binom{n}{k}^{-1}$

$$\sum_{\underline{A}} = \sum_{A_1}^{n-k+1} \sum_{A_1=A_1+1}^{n-k+2} \ldots\ldots \sum_{A_k=A_{k-1}+1}^{n} \qquad k = 1,2,\ldots\ldots,n$$

(Dixit;1989:P3074; Nasiri:2010;P:456; Gupta&Singh;2017:P9-10; Nooghabi& Nasiri, 2012:P99; E. Hemeda& M. Abdallah, 2018:P5-6).

دالة التوزيع المشترك في حالة وجود k من الشواذ عندما يكون التوزيع الأصلي توزيع فريچت (Frechet Distribution) والتوزيع الملوث هو التوزيع الأسي(Exponential Distribution) :

لتكن $(X_1, X_2, \ldots\ldots, X_n)$ متغيرات عشوائية تتبع توزيع فريچت وفق دالة الكثافة الاحتمالية الآتية:

$$f(x,\alpha,\lambda) = \alpha\lambda\, x^{-(\alpha+1)}\, exp(-\lambda x^{-\alpha}) \;\;;\;\; x \geq 0\,;\, \alpha,\lambda > 0 \qquad (15)$$

وان (k) من تلك المشاهدات لها توزيع أسي بدالة المثافة الأحتمالية الآتية :

$$f(x,\lambda) = \lambda exp(-\lambda x) \;\;;\;\; x \geq 0\,;\, \lambda > 0 \qquad (16)$$

فأن دالة الكثافة الاحتمالية المشتركة للـ $(\mathbf{X_1}, \mathbf{X_2}, \dots \dots \dots, \mathbf{X_n})$ في حالة وجود (k) من الشواذ تكتب كالآتي:

$$f(X_1, X_2, \dots \dots \dots, X_n; \alpha, \lambda) = C \prod_{j=1}^{n} f(x_j; \alpha, \lambda) \sum_{\underline{A}} \prod_{r=1}^{k} \frac{g(x_A;\lambda)}{f(x_A;\alpha,\lambda)} \quad (17)$$

$$f(X_1, X_2, \dots \dots \dots, X_n; \alpha, \lambda) = C \prod_{j=1}^{n} \alpha\lambda x^{-(\alpha+1)} exp(-\lambda x^{-\alpha}) \sum_{\underline{A}} \prod_{r=1}^{k} [\frac{exp(-\lambda x_{Ar})}{\alpha\lambda x_{Ar}{}^{-(\alpha+1)} exp(-\lambda x_{Ar}{}^{-\alpha})}]$$

$$L= C\alpha^{n-k}\lambda^n \prod_{i=1}^{n} x^{-(\alpha+1)} exp\left(-\lambda \sum_{j=1}^{n} x^{-\alpha}\right) \sum_{\underline{A}} \prod_{r=1}^{k} [\frac{exp(-\lambda x_{Ar})}{x_{Ar}{}^{-(\alpha+1)} exp(-\lambda x_{Ar}{}^{-\alpha})}]$$

$$L= C\alpha^{n-k}\lambda^n \prod_{i=1}^{n} x^{-(\alpha+1)} exp\left(-\lambda \sum_{j=1}^{n} x^{-\alpha}\right) \sum_{A} \prod_{r=1}^{k} [\frac{exp\, \lambda(x_{Ar}{}^{-\alpha} - x_{Ar})}{x_{Ar}{}^{-(\alpha+1)}}]$$

$$L\propto C\alpha^{n-k}\lambda^n \prod_{i=1}^{n} x^{-(\alpha+1)} exp\left(-\lambda \sum_{j=1}^{n} x^{-\alpha}\right) \sum_{\underline{A}} Z(x_{Ar}, \alpha, \lambda) \quad (19)$$

$$Z(x_{Ar}, \alpha, \lambda) = \prod_{r=1}^{k} [\frac{exp\, \lambda(x_{Ar}{}^{-\alpha} - x_{Ar})}{x_{Ar}{}^{-(\alpha+1)}}] \quad (20)$$

٨.٢ طرائق التقدير باستعمال نموذج الشواذ لـ Dixit

١.٨.٢ طريقة الامكان الاعظم

في حالة وجود k من الشواذ عندما يكون التوزيع الأصلي توزيع فريچت (Frechet Distribution) والتوزيع الملوث هو التوزيع الأســـي(Exponential Distribution) :

وللحصول على مقدرات المكان الاعظم للمعلمات $(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\lambda})$ نجد المشتقة الأولى للدالة (٢٠) نسبة الى كل معملة من العلمات ونساوي المشتقة بالصفر نحصل على الآتي:

$$\frac{\partial L^*}{\partial \alpha} = \frac{n-k}{\hat{\alpha}} - \sum_{j=1}^{n} ln\,(x_i) + \hat{\lambda}\, ln(\hat{\alpha}) \sum_{j=1}^{n} x^{-\hat{\alpha}} + \frac{\sum_{\underline{A}} Z'(x_{Ar},\hat{\alpha},\hat{\lambda})}{\sum_{\underline{A}} Z(x_{Ar},\hat{\alpha},\hat{\lambda})} = 0 \quad (21)$$

والان نشتق بالنسبة للـ $\boldsymbol{\lambda}$ وكالاتي:

$$\frac{\partial L^*}{\partial \lambda} = \frac{n}{\hat{\lambda}} - \sum_{j=1}^{n} x^{-\hat{\alpha}} + \frac{\sum_{\underline{A}} Z'(x_{Ar},\hat{\alpha},\hat{\lambda})}{\sum_{\underline{A}} Z(x_{Ar},\hat{\alpha},\hat{\lambda})} = 0 \quad (22)$$

ونلاحظ من الصيغ (21) و(22) بانه ليس هنالك صيغة مغلقة للحل, لذلك سوف نستعمل طريقة نيوتن رافسون $\boldsymbol{Newton\text{–}\, Raphson\ method}$ العددية التكرارية لنحصل على مقدرات الامكان الاعظم في ظل وجود بيانات ملوثة $\widehat{\boldsymbol{\alpha}}_{\boldsymbol{cmle}}$ و $\widehat{\boldsymbol{\lambda}}_{\boldsymbol{cmle}}$ وكالاتي :

ليكن $\boldsymbol{\theta} = (\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\lambda})^{\boldsymbol{T}}$ متجه المعلمات المراد تقديرها , فان عند الخطوة $(\boldsymbol{h}+\mathbf{1})$ من عمليات التكرار يمكن الحصول على المعلمات كالاتي:

$$\theta^{h+1} = \theta^h - \left[\frac{\partial^2 L^*(\alpha,\lambda;x)}{\partial\theta\partial\theta^T}\ \Big|_{\theta=\theta^h}\right]^{-1} \cdot \left[\frac{\partial L^*(\alpha,\lambda;x)}{\partial\theta}\ \Big|_{\theta=\theta^h}\right] \quad (23)$$

$$\frac{\partial \boldsymbol{L}^*(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\lambda};\boldsymbol{x})}{\partial\boldsymbol{\theta}} = \begin{pmatrix} \frac{\partial \boldsymbol{L}^*(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\lambda};\boldsymbol{x})}{\partial\boldsymbol{\alpha}} \\ \frac{\partial \boldsymbol{L}^*(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\lambda};\boldsymbol{x})}{\partial\boldsymbol{\lambda}} \end{pmatrix}$$

اذ أن : $\frac{\partial^2 \boldsymbol{L}^*(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\lambda};\boldsymbol{x})}{\partial\boldsymbol{\theta}\partial\boldsymbol{\theta}^{\boldsymbol{T}}}$ تمثل مصفوفة معلومات فيشر المشاهدة كالآتي:

$$\frac{\partial^2 \boldsymbol{L}^*(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\lambda};\boldsymbol{x})}{\partial\boldsymbol{\theta}\partial\boldsymbol{\theta}^{\boldsymbol{T}}} = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 \boldsymbol{L}^*(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\lambda};\boldsymbol{x})}{\partial\boldsymbol{\alpha}^2} & \frac{\partial^2 \boldsymbol{L}^*(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\lambda};\boldsymbol{x})}{\partial\boldsymbol{\alpha}\partial\boldsymbol{\lambda}} \\ \frac{\partial^2 \boldsymbol{L}^*(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\lambda};\boldsymbol{x})}{\partial\boldsymbol{\alpha}\partial\boldsymbol{\lambda}} & \frac{\partial^2 \boldsymbol{L}^*(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\lambda};\boldsymbol{x})}{\partial\boldsymbol{\lambda}^2} \end{pmatrix}$$

$$\frac{\partial^2 \boldsymbol{L}^*(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\lambda};\boldsymbol{x})}{\partial\boldsymbol{\alpha}^2} = \frac{\partial^2 \boldsymbol{L}^*(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\lambda};\boldsymbol{x})}{\partial\boldsymbol{\lambda}^2} = -\frac{\boldsymbol{n}}{\hat{\boldsymbol{\lambda}}^2} - + \frac{\left[\sum_{\underline{A}} \boldsymbol{Z}(x_{Ar},\hat{\boldsymbol{\alpha}},\hat{\boldsymbol{\lambda}}) \sum_{\underline{A}} \boldsymbol{Z}'(x_{Ar},\hat{\boldsymbol{\alpha}},\hat{\boldsymbol{\lambda}}) - (\sum_{\underline{A}} \boldsymbol{Z}'(x_{Ar},\hat{\boldsymbol{\alpha}},\hat{\boldsymbol{\lambda}}))^2\right]}{(\sum_{\underline{A}} \boldsymbol{Z}(x_{Ar},\hat{\boldsymbol{\alpha}},\hat{\boldsymbol{\lambda}}))^2}$$

$$\frac{\partial^2 L^*(\alpha,\lambda;x)}{\partial\alpha\partial\lambda} = -\,(ln(\hat{\alpha}))^2 \sum_{j=1}^{n} x^{-\hat{\alpha}} + \frac{1}{\hat{\alpha}} \sum_{j=1}^{n} x^{-\alpha} + \frac{\left[\sum_{\underline{A}} Z(x_{Ar},\hat{\alpha},\hat{\lambda}) \sum_{\underline{A}} Z'(x_{Ar},\hat{\alpha},\hat{\lambda}) - (\sum_{\underline{A}} Z'(x_{Ar},\hat{\alpha},\hat{\lambda}))^2\right]}{(\sum_{\underline{A}} Z(x_{Ar},\hat{\alpha},\hat{\lambda}))^2}$$

ونستمر بعملية التكرار $\boldsymbol{Replication}$ حتى التقارب , اي حتى يكون $\left|\left|\boldsymbol{\theta}^{\mathbf{h+1}} - \boldsymbol{\theta}^{\mathbf{h}}\right|\right|$ اقل من $\boldsymbol{\varepsilon}$ بحيث ان $\boldsymbol{\varepsilon} > \mathbf{0}$ وعدد صغير جدا .

(Abbas, 2013, P37; Harlow, 2002, p486; Bucher, A. and Segers, P33; Bucher, 2016, P29).

وللحصول على المعولية التقريبية نعوض التقديرات التي تم الحصول عليها $\widehat{\alpha}_{Mle(F.Exp)}$ و $\hat{\lambda}_{Mle(F.Exp)}$ في حالة التوزيع الأصلي للبيانات فريچت والتوزيع الملوث أسي في دالة المعولية للتوزيع ينتج:

$$\hat{R}_{Mle(F.Exp)}(x) = 1 - exp(-\hat{\lambda}_{Mle(F.Exp)} x^{-\widehat{\alpha}_{Mle(F.Exp)}}) \quad (24)$$

٢.٨.٢ طريقة العزوم Moments Method

في حالة وجود k من الشواذ عندما يكون التوزيع الأصلي توزيع فريچت (Frechet Distribution) والتوزيع الملوث هو التوزيع الأســـي(Exponential Distribution) :
من معادلة (١٨) يكون التوزيع الحدي للـ x هو :

$$h(X_1, X_2, \dots\dots\dots, X_n; \alpha, \lambda) = b\lambda exp(-\lambda x) + \bar{b}\alpha\lambda x^{-(\alpha+1)} exp(-\lambda x^{-\alpha}) \quad ; X > 0, \alpha, \lambda > 0 \quad (25)$$

$$b = \frac{k}{n} \quad , \bar{b} = \frac{n-k}{n} \quad , b + \bar{b} = 1$$

أن عزم العينة يمكن ان يتسخرج كالآتي:

$$m'_i = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} E_{\alpha,\lambda}(X/x_j^i)$$

ولإيجاد عزم المتجمع كالآتي:
من معادلة (٢٣) نحصل على :

$$M'_2 = E(X^2) = bE\left(X^2{}_{f_{2(x)}}\right) + \bar{b}E(X^2{}_{f_1(x)})$$

(Deiri, 2011: P1512-1513; E. Hemeda & M. Abdallah, 2018:P5-6; Makhdoom & Nasisri, 2012: P3812-3813).

$$f_2(x) = \lambda exp(-\lambda x)$$

$$M'_2 = b\frac{2}{\lambda^2} + \bar{b}\lambda^{\frac{2}{\alpha}}\Gamma^2(1 - \frac{2}{\alpha}) \quad (26)$$

وبمساواة عزم العينة مع عزم المجتمع نحصل على :

$$b\frac{2}{\lambda^2} + \bar{b}\lambda^{\frac{2}{\alpha}}\Gamma^2(1 - \frac{2}{\alpha}) = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} E_{\alpha,\lambda}(X/x_j^2) \quad (27)$$

ونلاحظ من الصيغتين (٢٦) و (27) بأنه ليست هنالك صيغة مغلقة للحل, فاننا سوف نستعمل طريقة عددية تكرارية للحصول على تقديرات المعلمات α و λ والتي يمكن وصفها كالاتي :

- لنفرض التقديرات الابتدائية للـ α و λ , هي α^0 و λ^0 عندما $h = 0$ والذي يمثل التكرار الابتدائي لخوارزمية الطريقة.
- في التكرار التالي رقم $(h+1)$ نحسب اولاً :

$$E_{\alpha^{(h)},\lambda^{(h)}}(X^r/x) = \frac{\int b\lambda^{(h)} exp(-\lambda^{(h)}x) + \bar{b}\alpha\lambda x^{-(\alpha^{(h)}+1)+r} exp(-\lambda^{(h)}x^{-\alpha^{(h)}})dx}{\int b\lambda^{(h)} exp(-\lambda^{(h)}x) + \bar{b}\alpha\lambda x^{-(\alpha^{(h)}+1)} exp(-\lambda^{(h)}x^{-\alpha^{(h)}})dx}; r = 1,2 \quad (28)$$

$$\alpha^{(h+1)} = \frac{b\frac{2}{\lambda^{(h)2}} + \bar{b}\lambda^{(h)\frac{2}{\alpha^{(h)}}}\Gamma^2(1 - \frac{2}{\alpha^{(h)}})}{b\frac{1}{\lambda^{(h)}} + \bar{b}\lambda^{(h)\frac{1}{\alpha^{(h)}}}\Gamma(1 - \frac{1}{\alpha^{(h)}})} = \frac{[\sum_{i=1}^{n} E_{\alpha^{(h)},\lambda^{(h)}}(X/x)]^2}{n\sum_{i=1}^{n} E_{\alpha^{(h)},\lambda^{(h)}}(X^2/x)} \quad (29)$$

للحصول على الحل عند $\alpha^{(h+1)}$

١- نحل معادلة رقم (٣٤) بالنسبة للـ λ نحصل على :

$$\lambda^{(h+1)} = \left[\frac{b\frac{2}{\lambda^{(h)^2}} + \bar{b}\lambda^{\frac{2}{\alpha^{(h)}}}\Gamma^2(1-\frac{2}{\alpha^{(h)}})}{b\frac{1}{\lambda^{(h)}} + \bar{b}\lambda^{(h)\frac{1}{\alpha^{(h)}}}\Gamma(1-\frac{1}{\alpha^{(h)}})} = \frac{[\sum_{i=1}^{n} E_{\alpha^{(h)},\lambda^{(h)}}(X/x)]^2}{n\sum_{i=1}^{n} E_{\alpha^{(h)},\lambda^{(h)}}(X^2/x)} \right]^{\alpha^{(h+1)}} \quad (30)$$

٢- نضع $h = h + 1$, ونكرر الخطوة (٢) و (٤) الى ان يحصل التقارب بين التقديرات لنحصل على تقديرات طريقة العزوم $\widehat{\alpha}_{Mom(F.Exp)}$ و $\widehat{\lambda}_{Mom(F.Exp)}$.

وللحصول على المعولية التقريبية نعوض التقديرات التي تم الحصول عليها في $\widehat{\alpha}_{Mom(F.Exp)}$ و $\widehat{\lambda}_{Mom(F.Exp)}$ الناتجة من كون التوزيع الاصلي فريجت والملوث أسي في دالة المعولية للتوزيع وكالآتي:

$$\widehat{R}_{Mom(F.Exp)}(x) = 1 - \exp(-\widehat{\lambda}_{Mom(F.Exp)} x^{-\widehat{\alpha}_{Mom(F.Exp)}}) \quad (31)$$

٣.٨.٢ طريقة العزوم الخطية

العزوم الخطية هي توقعات لتراكيب خطية ضمن الاحصاءات المرتبة . اقترحت هذه الطريقة من قبل (Hosting 1990) وكذلك (David and Nagaraj 2003). وتعتمد على الحصول على معادلات ناتجة من تساوي B_r, مع b_r علما بان B_r هو توقع لدالة C.D.F مرفوعة للأس (r) $F^r(X)$ نسبة للدالة الاحتمالية $f(x)$ ، وبعد الحصول على صيغة B_r نساوي مع صيغة العزوم الخطية b_r للحصول على مقدرات المعلمات التي تكون نظام المعادلات مرتبه ومساوية لعدد المعلمات في التقدير (λ و α) .

ويمكن الحصول على مقدرات المعلمات ($\hat{\lambda}$ و $\hat{\alpha}$) باستعمال نموذج الشواذ لـ *Dixit* كالآتي:
في حالة وجود k من الشواذ عندما يكون التوزيع الأصلي توزيع فريجت (Frechet Distribution) والتوزيع الملوث هو التوزيع الأســـــي(Exponential Distribution) :

$$B_r = \int_0^{\infty} x F^r(X) f(x) dx \quad (32)$$

$$b_r = \frac{1}{nC_r^{n-1}} \sum_{i=1}^{n} C_r^{i-1} x_{(i)} \quad (33)$$

حيث إنها معرفة على رتب العينة

$$x_{(1)} \le x_{(2)} \le \ \dots\dots\dots\dots \le x_{(n)}$$

$$x_1, x_2 \dots\dots\dots\dots\ x_n$$

وأن :

$$F^r(X) = [\exp(-\lambda x^{-\alpha})]^r \quad (34)$$

لذلك فأن :

$$B_r = \int_0^{\infty} x[\exp(-\lambda x^{-\alpha})]^r C\alpha^{n-k}\lambda^n \prod_{i=1}^{n} x^{-(\alpha+1)} \exp\left(-\lambda \sum_{j=1}^{n} x^{-\alpha}\right) \sum_{\underline{A}} \prod_{r=1}^{k} [\frac{\exp\lambda(x_{Ar}{}^{-\alpha} - x_{Ar})}{x_{Ar}{}^{-(\alpha+1)}}] \ dx$$

$$B_r = C\alpha^{n-k}\lambda^n \int_0^{\infty} x[\exp(-\lambda x^{-\alpha})]^r \prod_{i=1}^{n} x^{-(\alpha+1)} \exp\left(-\lambda \sum_{j=1}^{n} x^{-\alpha}\right) \sum_{\underline{A}} \prod_{r=1}^{k} [\frac{\exp\lambda(x_{Ar}{}^{-\alpha} - x_{Ar})}{x_{Ar}{}^{-(\alpha+1)}}] \ dx$$

$$B_r = C\alpha^{n-k}\lambda^n \int_0^{\infty} x\exp(-r\lambda x^{-\alpha}) \prod_{i=1}^{n} x^{-(\alpha+1)} \exp(-\lambda \sum_{j=1}^{n} x^{-\alpha}) \sum_{\underline{A}} \prod_{r=1}^{k} [\frac{\exp\lambda(x_{Ar}{}^{-\alpha} - x_{Ar})}{x_{Ar}{}^{-(\alpha+1)}}] \ dx \quad (35)$$

من المعادلة السابقة نحصل على:

عندما r=1 فان :

$$B_1 = C\alpha^{n-k}\lambda^n \int_0^\infty x\exp(-\lambda x^{-\alpha}) \prod_{i=1}^{n} x^{-(\alpha+1)} \exp\left(-\lambda \sum_{j=1}^{n} x^{-\alpha}\right) \sum_{\underline{A}} \prod_{r=1}^{k}\left[\frac{\exp\lambda(x_{Ar}{}^{-\alpha}-x_{Ar})}{x_{Ar}{}^{-(\alpha+1)}}\right] dx \quad (36)$$

عندما r=2 فان :

$$B_2 = C\alpha^{n-k}\lambda^n \int_0^\infty x\exp(-2\lambda x^{-\alpha}) \prod_{i=1}^{n} x^{-(\alpha+1)} \exp\left(-\lambda \sum_{j=1}^{n} x^{-\alpha}\right) \sum_{\underline{A}} \prod_{r=1}^{k}\left[\frac{\exp\lambda(x_{Ar}{}^{-\alpha}-x_{Ar})}{x_{Ar}{}^{-(\alpha+1)}}\right] dx \quad (37)$$

من معادلة (37) عندما r=1 فان :

$$b_1 = \frac{1}{n(n-1)} \sum_{i=1}^{n} (i-1) x_{(i)} \quad (38)$$

$$b_2 = \frac{1}{n(n-1)(n-2)} \sum_{i=1}^{n} (i-1)(i-2) x_{(i)} \quad (39)$$

للحصول على مقدرات المعلمات $(\hat{\lambda}$ و $\hat{\alpha})$ وبعد تساوي المعادلات لاستخراج مقدرات المعلمات الاربعة نحصل ما يأتي :

$B_1 = b_1$ $\quad$ $B_2 = b_2$ وتكون المعادلات الناتجة كالآتي:

$$C\alpha^{n-k}\lambda^n \int_0^\infty x\exp(-2\lambda x^{-\alpha}) \prod_{i=1}^{n} x^{-(\alpha+1)} \exp\left(-\lambda \sum_{j=1}^{n} x^{-\alpha}\right) \sum_{\underline{A}} \prod_{r=1}^{k}\left[\frac{\exp\lambda(x_{Ar}{}^{-\alpha}-x_{Ar})}{x_{Ar}{}^{-(\alpha+1)}}\right] dx = \frac{1}{n(n-1)(n-2)} \sum_{i=1}^{n} (i-1)(i-2) x_{(i)} \quad \sum_{i=1}^{n} (i-1) x_{(i)} \quad (40)$$

لايمكن ان تحل بالطرائق التحليلية الاعتيادية ولذلك لابد من استخدام الطرائق العددية التكرارية للحصول على مقدرات المعلمات $(\lambda$ و $\alpha)$ وسيتم استعمال طريقة نيوتن رافسون لغرض الحصول على المقدرات $\widehat{\alpha}_{LMom(F.Exp)}$ و $\hat{\lambda}_{LMom(F.Exp)}$

وللحصول على المعولية التقريبية نعوض التقديرات التي تم الحصول عليها في $\widehat{\alpha}_{LMom(F.Exp)}$ و $\hat{\lambda}_{LMom(F.Exp)}$ الناتجة من كون التوزيع الاصلي فريجت والملوث أسي في دالة المعولية للتوزيع وكالآتي:

$$\hat{R}_{LMom(F.Exp)}(x) = 1 - \exp(-\hat{\lambda}_{LMom(F.Exp)} x^{-\widehat{\alpha}_{LMom(F.Exp)}}) \quad (41)$$

٣ توليد الأعداد العشوائية

تتكون آلية توليد الاعداد العشوائية كالآتي:

١. توليد أعداد عشوائية تتبع التوزيع المنتظم المستمر ضمن الفترة [٠، ١] من خلال استعمال دالة الكثافة التجميعية للتوزيع ويشترط في تلك الإعداد إن تكون مستقلة عن بعضها.
٢. تحويل العدد العشوائي المنتظم إلى متغير عشوائي يصف الأنموذج المدروس في ظل تجارب المحاكاة وكما مبين في المعادلة الآتية:

$$Y = F(z) \quad (42)$$

$$z = F^{-1}(y) \quad (43)$$

مراحل تطبيق تجارب المحاكاة

تتضمن تجارب المحاكاة المراحل الاتية:

المرحلة الأولى: تعد هذه المرحلة من اهم المراحل التي تعتمد عليها المراحل اللاحقة حيث يتم فيها اختيار القيم الافتراضية وكما يأتي:

١. تعيين حجوم العينات المفترضة وكما يأتي: n=25,50,75,100
٢. اختيار قيم المعلمات الافتراضية(التجريبية) كما مبينة بالجدول الاتي:

جدول ١: قيم المعلمات الافتراضية

Model	١	٢	٣
α	٢.٥	٥	٣
λ	٣	٢.٥	٣

إعتماد قيم افتراضية لتلوث البيانات وذلك بافتراض ثلاثة قيم لـ k كالآتي: $k = 2 , 4$
تكرار تجارب المحاكاة مساوياً لـ (r = 1000) لكل تجربة.

المرحلة الثانية: توليد البيانات

١. توليد بيانات توزيع فريچت باستعمال معكوس الدالة التوزيعية للتوزيع حسب الصيغة الآتية:

$$\boldsymbol{t_i} = \left(-\frac{\boldsymbol{ln(u)}}{\boldsymbol{\lambda}}\right)^{\left(-\frac{1}{\alpha}\right)} \qquad (44)$$

إذ إن u: متغير عشوائي مستمر يتبع التوزيع المنتظم ويتم توليده بالحاسبة الالكترونية من خلال الدالة:

u = rand (1) (45)

٢. توليد بيانات التوزيعات التي سيتم استعمالها في التلويث:
توليد بيانات التوزيع الأسي باستعمال معكوس الدالة التوزيعية للتوزيع حسب الصيغة الآتية:

$$\boldsymbol{t_i} = -\frac{\boldsymbol{ln(1-u)}}{\boldsymbol{\lambda}} \qquad (46)$$

المرحلة الرابعة: وهي المرحلة الأخيرة حيث يتم فيها المقارنة بين طرائق تقدير دالة معولية توزيع فريچت لغرض الوصول للمقدر الأكفأ من خلال المفاضلة بين طرائق التقدير المدروسة. فقد تم الاعتماد على متوسط مربعات الخطأ التكاملي (IMSE): لكون (MSE) يحسب لكل (t_i) من الزمن فإن (IMSE) يمثل تكامل للمساحة الكلية (t_i) واختزالها بقيمة واحدة تعد عامة للزمن. أو معبرة عن الزمن الكلي.

مناقشة نتائج تجارب المحاكاة

سيتم عرض وتحليل نتائج تجارب المحاكاة لتقدير دالة المعولية لتوزيع فريچت بحسب الطرائق لهذه النتائج باعتماد برنامج كُتِبَ بلغة (Math lab. Ver.2015) ولغرض توضيح مختصرات الرموز التي وردت في جداول تحليل نتائج المحاكاة فستكون كما يأتي:

جدول ٢: مختصرات طرائق التقدير

الطريقة	المختصر
طريقة الأمكان الاعظم في حالة التوزيع الأصلي للبيانات فريچت والتوزيع الملوث أسي	$Mle(F.Exp)$
طريقة العزوم في حالة التوزيع الأصلي للبيانات فريچت والتوزيع الملوث أسي	$Mom(F.Exp)$
طريقة العزوم الخطية في حالة التوزيع الأصلي للبيانات فريچت والتوزيع الملوث أسي	$LMom(F.Exp)$

وفيما يأتي النتائج الموضحة في الجداول التي سيتم تحليلها وكما يأتي:
تقديرات دالة المعولية عندما k=2 :

جدول ٣: تقديرات دالة المعولية R بجميع الطرائق ومتوسط مربعات الخطأ التكاملي IMSE عند كل حجم عينة

k=2	α=3	λ=2.5			k=2	α=3	λ=2.5		
MLE			Best		LMom(F.Exp)	Mom(F.Exp)	Mle(F.Exp)	Real	N
$\hat{\alpha} = 2.76$	$\hat{\alpha} = 2.72$	$\hat{\alpha} = 2.88$		50	$\hat{\alpha} = 2.39$	$\hat{\alpha} = 2.62$	$\hat{\alpha} = 2.92$		
$\hat{\lambda} = 3.02$	$\hat{\lambda} = 2.44$	$\hat{\lambda} = 2.51$			$\hat{\lambda} = 2.41$	$\hat{\lambda} = 2.46$	$\hat{\lambda} = 2.48$		

0.98834	0.98953	0.99206	0.99203		0.98631	0.97241	0.99214	0.99203	25
0.9294	0.95117	0.95207	0.95123		0.92175	0.94815	0.95377	0.95123	
0.82942	0.87513	0.88249	0.87985		0.81668	0.85432	0.88771	0.87985	
0.70294	0.7644	0.79021	0.78506		0.68811	0.71626	0.80031	0.78506	
0.56633	0.64182	0.68369	0.6757		0.55327	0.59844	0.69931	0.6757	
0.47703	0.56561	0.60913	0.5993		0.46702	0.53776	0.6284	0.5993	
0.39326	0.49807	0.53461	0.52309		0.38727	0.4895	0.55726	0.52309	
0.31744	0.44011	0.46227	0.44933		0.31591	0.45093	0.48785	0.44933	
0.25104	0.39115	0.39388	0.37984		0.25385	0.41967	0.42181	0.37984	
0.22157	0.3697	0.36159	0.34715		0.22637	0.4062	0.39045	0.34715	
0.01082	0.03865	0.00154	IMSE		0.01272	0.07932	0.00533	IMSE	
MLE			Best		MLE	MLE	MLE	Best	
$\hat{\alpha}=2.39$ $\hat{\lambda}=2.41$	$\hat{\alpha}=2.62$ $\hat{\lambda}=2.46$	$\hat{\alpha}=2.92$ $\hat{\lambda}=2.48$		100	$\hat{\alpha}=2.99$ $\hat{\lambda}=3.02$	$\hat{\alpha}=3.32$ $\hat{\lambda}=2.44$	$\hat{\alpha}=3.23$ $\hat{\lambda}=2.51$		75
0.98866	0.9914	0.99202	0.99203		0.98854	0.99044	0.99208	0.99203	
0.9312	0.95117	0.95136	0.95123		0.93053	0.95048	0.95185	0.95123	
0.8333	0.87822	0.88035	0.87985		0.83186	0.8765	0.88162	0.87985	
0.70861	0.77805	0.78611	0.78506		0.70654	0.77287	0.78835	0.78506	
0.57278	0.66238	0.67742	0.6757		0.57047	0.65437	0.68065	0.6757	
0.4833	0.58383	0.60145	0.5993		0.48111	0.57642	0.60529	0.5993	
0.39883	0.50863	0.52566	0.52309		0.39695	0.50434	0.53002	0.52309	
0.32193	0.43943	0.45226	0.44933		0.32052	0.44033	0.45701	0.44933	
0.25422	0.3777	0.38307	0.37984		0.25335	0.38494	0.38808	0.37984	
0.22407	0.3498	0.35049	0.34715		0.22348	0.36036	0.35559	0.34715	
0.00965	0.01542	0.00042	IMSE		0.01007	0.02585	0.00082	IMSE	
MLE			Best						

يتضح من جدول ٣عند قيم المعلمات الافتراضية λ و α و نسبة تلوث k=2 وباستعمال المعيار الاحصائي متوسط مربعات الخطأ التكاملي IMSE ولاحجام عنية مختلفة لاختيار افضل تقدير للمعولية للمعولية التقريبية وكالآتي:

١. عند حجم عينة (n=25) و نسبة تلوث (K=2) وقيم معلمات افتراضية α=3, λ=2.5:
 - ❖ المعولية المقدرة بطريقة الامكان الاعظم $\hat{R}_{Mle}$ تقترب اكثر من المعولية الحقيقية من طريقة العزوم الخطية $\hat{R}_{LMom}$ و طريقة العزوم $\hat{R}_{Mom}$
 - ❖ المعولية المقدرة بطريقة الامكان الاعظم عندما يكون التوزيع الملوث أسي $\hat{R}_{Mle(F.Exp)}$ تمتلك اقل متوسط مربعات خطأ تكاملي (IMSE=0.00533) بينما طريقة العزوم الخطية $\hat{R}_{LMom}$ ومن ثم طريقة العزوم $\hat{R}_{Mom}$.
 - ❖ المعولية المقدرة بطريقة العزوم الخطية $\hat{R}_{LMom}$ تمتلك طريقة العزوم الخطية اقل متوسط مربعات خطأ تكاملي (IMSE=0.01272) عندما يكون التوزيع الملوث أسي ومتوسط مربع خطأ تكاملي (IMSE=0.05061)
 - ❖ طريقة العزوم امتلكت اقل متوسط مربعات خطأ تكاملي (IMSE=0.07932) عندما يكون التوزيع الملوث أسي

٢. عند حجم عينة (n=50) و نسبة تلوث (K=2) وقيم معلمات افتراضية α=3, λ=2.5:
 - ❖ المعولية المقدرة بطريقة الامكان الاعظم $\hat{R}_{Mle}$ تقترب اكثر من المعولية الحقيقية من طريقة العزوم $\hat{R}_{Mom}$ وطريقة العزوم الخطية $\hat{R}_{LMom}$

❖ المعولية المقدرة بطريقة الامكان الاعظم عندما يكون التوزيع الملوث أسي $\hat{R}_{Mle(F.Exp)}$ تمتلك اقل متوسط مربعات خطأ تكاملي (IMSE=0.00154) بمتوسط مربعات خطأ تكاملي (IMSE=0.00779) بينما طريقة العزوم الخطية $\hat{R}_{LMom}$ ومن ثم طريقة العزوم $\hat{R}_{Mom}$.

٣. المعولية المقدرة بطريقة العزوم الخطية $\hat{R}_{LMom}$ تمتلك طريقة العزوم الخطية اقل متوسط مربعات خطأ تكاملي (IMSE=0.01082) عندما يكون التوزيع الملوث أسي وطريقة العزوم امتلكت اقل متوسط مربعات خطأ تكاملي (IMSE=0.03865) عندما يكون التوزيع الملوث أسي

عند حجم عينة (n=75) و نسبة تلوث (K=2) وقيم معلمات افتراضية $\alpha=3, \lambda=2.5$:

❖ معولية المقدرة بطريقة الامكان الاعظم $\hat{R}_{Mle}$ تقترب اكثر من المعولية الحقيقية من طريقة العزوم الخطية $\hat{R}_{LMom}$ و طريقة العزوم $\hat{R}_{Mom}$.

❖ المعولية المقدرة بطريقة الامكان الاعظم عندما يكون التوزيع الملوث أسي $\hat{R}_{Mle(F.Exp)}$ (IMSE=0.00724) بينما طريقة العزوم الخطية $\hat{R}_{LMom}$ ومن ثم طريقة العزوم $\hat{R}_{Mom}$.

٤. المعولية المقدرة بطريقة العزوم الخطية $\hat{R}_{LMom}$ تمتلك طريقة العزوم الخطية اقل متوسط مربعات خطأ تكاملي (IMSE=0.01007) عندما يكون التوزيع الملوث أسي, وان طريقة العزوم امتلكت اقل متوسط مربعات خطأ تكاملي (IMSE=0.02585) عندما يكون التوزيع الملوث اسي

عند حجم عينة (n=100) و نسبة تلوث (K=2) وقيم معلمات افتراضية $\alpha=3, \lambda=2.5$:

❖ معولية المقدرة بطريقة الامكان الاعظم $\hat{R}_{Mle}$ تقترب اكثر من المعولية الحقيقية من طريقة العزوم الخطية $\hat{R}_{LMom}$ و طريقة العزوم $\hat{R}_{Mom}$

❖ أن المعولية المقدرة بطريقة الامكان الاعظم عندما يكون التوزيع الملوث أسي $\hat{R}_{Mle(F.Exp)}$ IMSE=0.00689) بينما طريقة العزوم الخطية $\hat{R}_{LMom}$ ومن ثم طريقة العزوم $\hat{R}_{Mom}$.

❖ يتضح من ذلك ان افضل قيم المعولية المقدرة عند حجم ١٠٠ وبطريقة الامكان الاعظم ($\hat{R}_{Mle(F.Exp)}$) عندما يكون التوزيع الملوث اسي والذي تمتلك اقل متوسط خطأ تكاملي (IMSE=0.00042) وكانت متوافقة مع القيم الحقيقية

❖ ولطريقة العزوم امتلكت اقل متوسط مربعات خطأ تكاملي (IMSE=0.01542) عندما يكون التوزيع الملوث اسي.

جدول ٤ : تقديرات دالة المعولية R بجميع الطرائق ومتوسط مربعات الخطأ التكاملي IMSE عند كل حجم عينة

k=2	α=3	λ=3			k=2	α=3	λ=3		
Mom			Best		LMom(F.Exp)	Mom(F.Exp)	Mle(F.Exp)	Real	n
$\hat{\alpha}=2.56$ $\hat{\lambda}=2.21$	$\hat{\alpha}=2.54$ $\hat{\lambda}=3.26$	$\hat{\alpha}=3.11$ $\hat{\lambda}=3.22$			$\hat{\alpha}=2.77$ $\hat{\lambda}=2.25$	$\hat{\alpha}=2.54$ $\hat{\lambda}=3.19$	$\hat{\alpha}=3.22$ $\hat{\lambda}=3.01$		
0.89941	0.93981	0.96707	0.9672	50	0.97509	0.85942	0.96769	0.9672	25
0.74862	0.83723	0.84882	0.8465		0.69454	0.80357	0.85586	0.8465	
0.39699	0.74024	0.74576	0.7408		0.37336	0.72898	0.75856	0.7408	
0.15199	0.64881	0.65554	0.6483		0.1653	0.64404	0.67298	0.6483	
0.04377	0.56599	0.57647	0.5674		0.06539	0.56238	0.59758	0.5674	
0.00992	0.49382	0.50714	0.4966		0.02484	0.49426	0.53111	0.4966	
0.00185	0.43276	0.44633	0.4346		0.0096	0.44132	0.47249	0.4346	
0.00047	0.3938	0.40568	0.3932		0.00488	0.41004	0.4331	0.3932	
0.00007	0.34984	0.35732	0.3442		0.00213	0.37694	0.38602	0.3442	
0.00001	0.31359	0.31488	0.3012		0.00101	0.35116	0.34446	0.3012	
0.14404	0.01404	0.00196	IMSE		0.14185	0.041	0.0067	IMSE	

Mom			Best		Mom			Best	
$\hat{\alpha} = 2.34$ $\hat{\lambda} = 2.41$	$\hat{\alpha} = 2.77$ $\hat{\lambda} = 2.46$	$\hat{\alpha} = 2.97$ $\hat{\lambda} = 2.48$			$\hat{\alpha} = 2.99$ $\hat{\lambda} = 2.21$	$\hat{\alpha} = 2.61$ $\hat{\lambda} = 3.26$	$\hat{\alpha} = 3.04$ $\hat{\lambda} = 3.22$		
0.98882	0.96221	0.96712	0.9672		0.98869	0.95312	0.96747	0.9672	
0.75533	0.84469	0.84699	0.8465		0.75329	0.83965	0.84891	0.8465	
0.40452	0.74079	0.74202	0.7408		0.40264	0.73792	0.74513	0.7408	
0.15334	0.64824	0.65014	0.6483		0.1538	0.46551	0.65413	0.6483	
0.04173	0.56649	0.56972	0.5674	100	0.04311	0.56319	0.57432	0.5674	75
0.0083	0.49491	0.49929	0.4966		0.00915	0.49129	0.50432	0.4966	
0.00123	0.43269	0.43762	0.4346		0.00152	0.42947	0.44294	0.4346	
0.00025	0.3916	0.39646	0.3932		0.00035	0.38925	0.40191	0.3932	
0.00002	0.34348	0.34757	0.3442		0.00004	0.34296	0.35312	0.3442	
0	0.30211	0.30475	0.3012		0	0.30399	0.31032	0.3012	
0.14343	0.00353	0.00054	IMSE		0.14341	0.00768	0.00111	IMSE	
Mom			Best						

يتضح من جدول ٤ يتضح عند قيم المعلمات الافتراضية λ و α و نسبة تلوث k=2 وباستعمال المعيار الاحصائي متوسط مربعات الخطأ التكاملي IMSE ولاحجام عنية مختلفة لاختيار افضل تقدير للمعولية للمعولية التقريبية وكالآتي:

١- عند حجم عينة (n=25) و نسبة تلوث (K=2) وقيم معلمات افتراضية α=3, λ=3:

- ❖ المعولية المقدرة بطريقة العزوم $\hat{\mathbf{R}}_{\mathbf{Mom}}$ تقترب اكثر من المعولية الحقيقية , بينما طريقة الامكان الاعظم في حال التوزيع الملوث أسي $\hat{\mathbf{R}}_{\mathbf{Mom(F.Exp)}}$ بمتوسط مربعات خطأ تكاملي (IMSE=0.0410)
- ❖ المعولية المقدرة بطريقة الامكان الاعظم في حال التوزيع الملوث توزيع أسي $\hat{\mathbf{R}}_{\mathbf{Mle(F.Exp)}}$ اقل من المعلوية المقدرة بالطرائق الباقية بمتوسط مربعات خطأ تكاملي (IMSE=0.00670).

٢- عند حجم عينة (n=50) و نسبة تلوث (K=2) وقيم معلمات افتراضية α=3, λ=3:

- ❖ المعولية المقدرة بطريقة العزوم $\hat{\mathbf{R}}_{\mathbf{Mom}}$ تقترب اكثر من المعولية الحقيقية , في حال التوزيع الملوث أسي $\hat{\mathbf{R}}_{\mathbf{Mom(F.Exp)}}$ بمتوسط مربعات خطأ تكاملي (IMSE=0.01404).
- ❖ المعولية المقدرة بطريقة الامكان الاعظم في حال التوزيع الملوث توزيع أسي $\hat{\mathbf{R}}_{\mathbf{Mle(F.Exp)}}$ اقل من المعلوية المقدرة بالطرائق الباقية بمتوسط مربعات خطأ تكاملي (IMSE=0.00196).

٣- عند حجم عينة (n=75) و نسبة تلوث (K=2) وقيم معلمات افتراضية α=3, λ=3:

- ❖ المعولية المقدرة بطريقة العزوم $\hat{\mathbf{R}}_{\mathbf{Mom}}$ تقترب اكثر من المعولية الحقيقية , في حال التوزيع الملوث أسي $\hat{\mathbf{R}}_{\mathbf{Mom(F.Exp)}}$ بمتوسط مربعات خطأ تكاملي (IMSE=0.00768).
- ❖ المعولية المقدرة بطريقة الامكان الاعظم في حال التوزيع الملوث توزيع أسي $\hat{\mathbf{R}}_{\mathbf{Mle(F.Exp)}}$ اقل من المعلوية المقدرة بالطرائق الباقية بمتوسط مربعات خطأ تكاملي (IMSE=0.0011).

٤- عند حجم عينة (n=100) و نسبة تلوث (K=2) وقيم معلمات افتراضية α=3, λ=3:

- ❖ المعولية المقدرة بطريقة العزوم $\hat{\mathbf{R}}_{\mathbf{Mom}}$ تقترب اكثر من المعولية الحقيقية , في حال التوزيع الملوث أسي $\hat{\mathbf{R}}_{\mathbf{Mom(F.Exp)}}$ بمتوسط مربعات خطأ تكاملي (IMSE=0.00353) .
- ❖ يتضح من ذلك المعولية المقدرة بطريقة الامكان الاعظم في حال التوزيع الملوث توزيع أسي $\hat{\mathbf{R}}_{\mathbf{Mle(F.Exp)}}$ اقل من المعلوية المقدرة بالطرائق الباقية بمتوسط مربعات خطأ تكاملي (IMSE=0.00054).

تقديرات دالة المعولية عندما k=4 :

جدول ٥: تقديرات دالة المعولية R بجميع الطرائق ومتوسط مربعات الخطأ التكاملي IMSE عند كل حجم عينة

k=4	α=3		λ=2.5		k=4		α=3	λ=2.5	
MLE			Best		LMom(F.Exp)	Mom(F.Exp)	Mle(F.Exp)	*Real*	*N*
$\hat{\alpha}=2.39$ $\hat{\lambda}=2.43$	$\hat{\alpha}=2.67$ $\hat{\lambda}=2.37$	$\hat{\alpha}=2.88$ $\hat{\lambda}=2.48$			$\hat{\alpha}=2.58$ $\hat{\lambda}=2.33$	$\hat{\alpha}=2.73$ $\hat{\lambda}=2.34$	$\hat{\alpha}=2.96$ $\hat{\lambda}=2.54$		
0.98834	0.99001	0.99145	0.9915		0.98632	0.97527	0.99161	0.9915	
0.92942	0.95121	0.94839	0.94811		0.92189	0.94872	0.95057	0.94811	
0.82948	0.87547	0.87376	0.87266		0.81707	0.86433	0.87994	0.87266	
0.70306	0.76612	0.77546	0.77336	50	0.68882	0.73524	0.78693	0.77336	
0.56651	0.64424	0.66313	0.66016		0.55427	0.61655	0.68035	0.66016	25
0.47725	0.56744	0.58535	0.58197		0.46818	0.55337	0.60626	0.58197	
0.39352	0.49864	0.50841	0.50474		0.38854	0.50192	0.53264	0.50474	
0.31774	0.439	0.43458	0.43076		0.31722	0.46002	0.4616	0.43076	
0.25135	0.38819	0.36567	0.36178		0.25516	0.42574	0.39484	0.36178	
0.22189	0.3658	0.33348	0.32958		0.22766	0.41096	0.36346	0.32958	
0.01084	0.03504	0.00187	IMSE		0.01262	0.07146	0.00518	IMSE	
MLE			Best		MLE			Best	
$\hat{\alpha}=2.67$ $\hat{\lambda}=2.59$	$\hat{\alpha}=2.44$ $\hat{\lambda}=2.57$	$\hat{\alpha}=3.21$ $\hat{\lambda}=3.31$			$\hat{\alpha}=2.44$ $\hat{\lambda}=2.43$	$\hat{\alpha}=2.45$ $\hat{\lambda}=2.36$	$\hat{\alpha}=3.24$ $\hat{\lambda}=2.39$		
0.98867	0.99148	0.99137	0.9915		0.98855	0.9907	0.99147	0.9915	
0.93127	0.95117	0.94738	0.94811		0.93061	0.95051	0.94814	0.94811	
0.83345	0.87851	0.87087	0.87266		0.83205	0.87655	0.87275	0.87266	
0.70886	0.77923	0.77008	0.77336	100	0.70685	0.77352	0.77331	0.77336	75
0.57312	0.66456	0.65511	0.66016		0.57089	0.65535	0.65966	0.66016	
0.48368	0.58627	0.57569	0.58197		0.48159	0.57695	0.581	0.58197	
0.39924	0.51082	0.49733	0.50474		0.39747	0.50384	0.50324	0.50474	
0.32235	0.44086	0.42239	0.43076		0.32105	0.4384	0.42872	0.43076	
0.25463	0.37799	0.35272	0.36178		0.25388	0.38142	0.35927	0.36178	
0.22447	0.34944	0.32029	0.32958		0.224	0.35605	0.32687	0.32958	
0.00961	0.01338	0.00102	IMSE		0.01003	0.02315	0.00127	IMSE	
			Best						

يتضح من جدول ٥ عند قيم المعلمات الافتراضية λ و α و نسبة تلوث k=4 وباستعمال المعيار الاحصائي متوسط مربعات الخطأ التكاملي IMSE ولاحجام عينة مختلفة لاختيار افضل تقدير للمعولية للمعولية التقريبية وكالآتي:

١- عند حجم عينة (n=25) و نسبة تلوث (K=4) وقيم معلمات افتراضية α=3, λ=2.5:

- ❖ المعولية المقدرة بطريقة الامكان الاعظم $\hat{\mathbf{R}}_{\mathbf{Mle}}$ تقترب اكثر من المعولية الحقيقية من طريقة العزوم الخطية $\hat{\mathbf{R}}_{\mathbf{LMom}}$ ومن ثم طريقة العزوم $\hat{\mathbf{R}}_{\mathbf{Mom}}$.
- ❖ وأن المعولية المقدرة بطريقة الامكان الاعظم عندما يكون التوزيع الملوث أسي $\hat{\mathbf{R}}_{\mathbf{Mle(F.Exp)}}$ تمتلك اقل متوسط مربعات خطأ تكاملي (IMSE=0.00518)
- ❖ المعولية المقدرة بطريقة العزوم الخطية $\hat{\mathbf{R}}_{\mathbf{LMom}}$ تمتلك طريقة العزوم الخطية اقل متوسط مربعات خطأ تكاملي (IMSE=0.01262) عندما يكون التوزيع الملوث أسي ومتوسط مربع خطأ تكاملي (IMSE=0.04034) ولطريقة العزوم امتلكت اقل متوسط مربعات خطأ تكاملي (IMSE=0.07146) عندما يكون التوزيع الملوث اسي

٢- عند حجم عينة (n=50) و نسبة تلوث (K=4) وقيم معلمات افتراضية α=3, λ=2.5:

- ❖ المعولية المقدرة بطريقة الامكان الاعظم $\hat{\mathbf{R}}_{\mathbf{Mle}}$ تقترب اكثر من المعولية الحقيقية من طريقة العزوم الخطية $\hat{\mathbf{R}}_{\mathbf{LMom}}$ ومن ثم طريقة العزوم $\hat{\mathbf{R}}_{\mathbf{Mom}}$.
- ❖ المعولية المقدرة بطريقة الامكان الاعظم عندما يكون التوزيع الملوث أسي $\hat{\mathbf{R}}_{\mathbf{Mle(F.Exp)}}$ تمتلك اقل متوسط مربعات خطأ تكاملي (IMSE=0.00187) من المعولية المقدرة .

❖ المعولية المقدرة بطريقة العزوم الخطية $\hat{R}_{LMom}$ تمتلك طريقة العزوم الخطية اقل متوسط مربعات خطأ تكاملي (IMSE=0.01084) عندما يكون التوزيع الملوث أسي.

٣- عند حجم عينة (n=75) و نسبة تلوث (K=4) وقيم معلمات افتراضية α=3, λ=2.5 :

❖ المعولية المقدرة بطريقة الامكان الاعظم $\hat{R}_{Mle}$ تقترب اكثر من المعولية الحقيقية من طريقة العزوم الخطية $\hat{R}_{LMom}$ ومن ثم طريقة العزوم $\hat{R}_{Mom}$.

❖ المعولية المقدرة بطريقة الامكان الاعظم عندما يكون التوزيع الملوث أسي $\hat{R}_{Mle(F.Exp)}$ تمتلك اقل متوسط مربعات خطأ تكاملي (IMSE=0.00127) من المعولية المقدرة.

❖ المعولية المقدرة بطريقة العزوم الخطية $\hat{R}_{LMom}$ تمتلك طريقة العزوم الخطية اقل متوسط مربعات خطأ تكاملي (IMSE=0.01003) عندما يكون التوزيع الملوث أسي, ولطريقة العزوم امتلكت اقل متوسط مربعات خطأ تكاملي (IMSE=0.02315) عندما يكون التوزيع الملوث اسي.

٤- عند حجم عينة (n=100) و نسبة تلوث (K=4) وقيم معلمات افتراضية α=3, λ=2.5:

❖ المعولية المقدرة بطريقة الامكان الاعظم $\hat{R}_{Mle}$ تقترب اكثر من المعولية الحقيقية من طريقة العزوم الخطية $\hat{R}_{LMom}$ ومن ثم طريقة العزوم $\hat{R}_{Mom}$.

❖ المعولية المقدرة بطريقة الامكان الاعظم عندما يكون التوزيع الملوث أسي $\hat{R}_{Mle(F.Exp)}$ تمتلك اقل متوسط مربعات خطأ تكاملي (IMSE=0.00102) من المعولية المقدرة عندما يكون التوزيع الملوث ويبل $\hat{R}_{Mle(F.Weib)}$ (IMSE=0.00708) وتليها طريقة العزوم الخطية $\hat{R}_{LMom}$ ومن ثم طريقة العزوم $\hat{R}_{Mom}$.

❖ المعولية المقدرة بطريقة العزوم الخطية $\hat{R}_{LMom}$ تمتلك طريقة العزوم الخطية اقل متوسط مربعات خطأ تكاملي (IMSE=0.00961) عندما يكون التوزيع الملوث أسي , ولطريقة العزوم امتلكت اقل متوسط مربعات خطأ تكاملي (IMSE=0.01338) عندما يكون التوزيع الملوث اسي.

جدول ٦: تقديرات دالة المعولية R بجميع الطرائق ومتوسط مربعات الخطأ التكاملي IMSE عند كل حجم عينة عند قيم المعلمات الافتراضية λ=2.5 و α=5 و k=4 عند n= 25

k=4	α=5	λ=2.5			k=4	α=5	λ=2.5		
MLE			Best		LMom(F.Exp)	Mom(F.Exp)	Mle(F.Exp)	*Real*	*N*
$\hat{\alpha} = 4.77$ $\hat{\lambda} = 2.45$	$\hat{\alpha} = 3.89$ $\hat{\lambda} = 2.56$	$\hat{\alpha} = 4.86$ $\hat{\lambda} = 2.56$			$\hat{\alpha} = 4.56$ $\hat{\lambda} = 2.38$	$\hat{\alpha} = 3.95$ $\hat{\lambda} = 2.24$	$\hat{\alpha} = 4.92$ $\hat{\lambda} = 2.52$		
0.99691	0.98125	0.98872	0.98588	50	0.99511	0.97245	0.98642	0.98588	25
0.97255	0.91718	0.92895	0.92878		0.96391	0.91105	0.92554	0.92878	
0.9257	0.83478	0.83731	0.8524		0.90953	0.8324	0.83653	0.8524	
0.8599	0.74362	0.72769	0.7649		0.83776	0.74278	0.73142	0.7649	
0.77983	0.65035	0.61152	0.67018		0.7546	0.64904	0.62019	0.67018	
0.69075	0.55994	0.49799	0.57132		0.66587	0.55808	0.51116	0.57132	
0.59793	0.47584	0.39375	0.47314		0.57664	0.47524	0.41058	0.47314	
0.50615	0.40018	0.30285	0.38273		0.49097	0.40322	0.32241	0.38273	
0.41928	0.33393	0.22704	0.30632		0.41173	0.34248	0.2484	0.30632	
0.34013	0.27714	0.16626	0.24538		0.34066	0.29216	0.18851	0.24538	
0.01142	0.0049	0.00511	IMSE		0.01252	0.01529	0.00764	IMSE	
MLE			Best		MLE			Best	
$\hat{\alpha} = 4.67$ $\hat{\lambda} = 2.87$	$\hat{\alpha} = 3.43$ $\hat{\lambda} = 3.35$	$\hat{\alpha} = 5.11$ $\hat{\lambda} = 3.38$			$\hat{\alpha} = 4.46$ $\hat{\lambda} = 2.31$	$\hat{\alpha} = 3.59$ $\hat{\lambda} = 2.39$	$\hat{\alpha} = 4.67$ $\hat{\lambda} = 2.35$		
0.99703	0.9835	0.98887	0.98588	100	0.99698	0.9826	0.98853	0.98588	75
0.9736	0.9202	0.92794	0.92878		0.97317	0.91892	0.92717	0.92878	
0.92814	0.83743	0.8341	0.8524		0.9273	0.83616	0.83336	0.8524	
0.86458	0.74593	0.72216	0.7649		0.86267	0.7446	0.72174	0.7649	
0.78638	0.65249	0.60412	0.67018		0.7837	0.65103	0.60415	0.67018	
0.69867	0.56178	0.48938	0.57132		0.69544	0.56027	0.48987	0.57132	

0.60646	0.47695	0.38454	0.47314		0.60298	0.47562	0.38547	0.47314	
0.51441	0.39994	0.29355	0.38273		0.51105	0.3991	0.29484	0.38273	
0.42646	0.3317	0.21798	0.30632		0.42357	0.33169	0.21958	0.30632	
0.34564	0.27248	0.15767	0.24538		0.34347	0.27353	0.15949	0.24538	
0.0113	0.00164	0.00488	IMSE		0.01137	0.00302	0.00523	IMSE	
Mom			Best						

يتضح من جدول ٦ عند قيم المعلمات الافتراضية λ و α و نسبة تلوث k=4 وباستعمال المعيار الاحصائي متوسط مربعات الخطأ التكاملي IMSE ولاحجام عينة مختلفة لاختيار افضل تقدير للمعولية للمعولية التقريبية وكالآتي:

١- عند حجم عينة (n=25) و نسبة تلوث (K=4) وقيم معلمات افتراضية α=5, λ=2.5:

- ❖ المعولية المقدرة بطريقة الامكان الاعظم $\widehat{\mathbf{R}}_{\mathbf{Mle}}$ تقترب اكثر من المعولية الحقيقية من طريقة العزوم الخطية $\widehat{\mathbf{R}}_{\mathbf{LMom}}$ ومن ثم طريقة العزوم $\widehat{\mathbf{R}}_{\mathbf{Mom}}$.
- ❖ المعولية المقدرة بطريقة الامكان الاعظم عندما يكون التوزيع الملوث أسي $\widehat{\mathbf{R}}_{\mathbf{Mle(F.Exp)}}$ (IMSE=0.00764).

٢- عند حجم عينة (n=50) و نسبة تلوث (K=4) وقيم معلمات افتراضية α=5, λ=2.5:

- ❖ المعولية المقدرة بطريقة الامكان الاعظم $\widehat{\mathbf{R}}_{\mathbf{Mle}}$ تقترب اكثر من المعولية الحقيقية من طريقة العزوم الخطية $\widehat{\mathbf{R}}_{\mathbf{LMom}}$ ومن ثم طريقة العزوم $\widehat{\mathbf{R}}_{\mathbf{Mom}}$.
- ❖ المعولية المقدرة بطريقة الامكان الاعظم عندما يكون التوزيع الملوث اسي $\widehat{\mathbf{R}}_{\mathbf{Mle(F.Exp)}}$ بمتوسط مربعات خطأ تكاملي (IMSE=0.00511) وتليها طريقة العزوم $\widehat{\mathbf{R}}_{\mathbf{Mom}}$ التي تمتلك اقل متوسط مربعات خطأ تكاملي (IMSE=0.00490) عندما يكون التوزيع الملوث اسي $\widehat{\mathbf{R}}_{\mathbf{Mle(F.Exp)}}$ اقل من متوسط مربعات خطأ تكاملي (IMSE=0.00524) .
- ❖ المعولية المقدرة بطريقة العزوم الخطية $\widehat{\mathbf{R}}_{\mathbf{LMom}}$ في حالة التوزيع الملوث وان طريقة العزوم امتلكت اقل متوسط مربعات خطأ تكاملي (IMSE=0.004190) عندما يكون التوزيع الملوث اسي .

٣- عند حجم عينة (n=75) و نسبة تلوث (K=4) وقيم معلمات افتراضية α=5, λ=2.5:

- ❖ المعولية المقدرة بطريقة الامكان الاعظم $\widehat{\mathbf{R}}_{\mathbf{Mle}}$ ومن ثم تليها طريقة العزوم $\widehat{\mathbf{R}}_{\mathbf{Mom}}$ تقترب اكثر من المعولية الحقيقية ومن ثم طريقة العزوم الخطية $\widehat{\mathbf{R}}_{\mathbf{LMom}}$.
- ❖ المعولية المقدرة بطريقة الامكان الاعظم عندما يكون التوزيع الملوث أٍسي $\widehat{\mathbf{R}}_{\mathbf{Mle(F.Exp)}}$ (IMSE=0.00523) وتليها طريقة العزوم $\widehat{\mathbf{R}}_{\mathbf{Mom}}$ التي تمتلك اقل متوسط مربعات خطأ تكاملي (IMSE=0.00302) عندما يكون التوزيع الملوث اسي $\widehat{\mathbf{R}}_{\mathbf{Mle(F.Exp)}}$ اقل من متوسط مربعات خطأ تكاملي (IMSE=0.00323).
- ❖ المعولية المقدرة بطريقة العزوم الخطية $\widehat{\mathbf{R}}_{\mathbf{LMom}}$ حالة كون التوزيع الملوث أسي بمتوسط مربع خطأ تكاملي (IMSE=0.01130).

٤- عند حجم عينة (n=100) و نسبة تلوث (K=4) وقيم معلمات افتراضية α=5, λ=2.5:

- ❖ المعولية المقدرة بطريقة العزوم $\widehat{\mathbf{R}}_{\mathbf{Mom}}$ ومن ثم تليها طريقة الامكان الاعظم $\widehat{\mathbf{R}}_{\mathbf{Mle}}$ تقترب اكثر من المعولية الحقيقية ومن ثم طريقة العزوم الخطية $\widehat{\mathbf{R}}_{\mathbf{LMom}}$.
- ❖ المعولية المقدرة بطريقة العزوم عندما يكون التوزيع الملوث أٍسي $\widehat{\mathbf{R}}_{\mathbf{Mom(F.Exp)}}$ (IMSE=0.00173) وتليها طريقة الامكان الاعظم $\widehat{\mathbf{R}}_{\mathbf{Mle}}$ التي تمتلك اقل متوسط مربعات خطأ تكاملي (IMSE=0.00196) اقل من متوسط مربعات خطأ تكاملي (IMSE=0.0488) عندما يكون التوزيع الملوث توزيع اسي$\widehat{\mathbf{R}}_{\mathbf{Mle(F.Exp)}}$.
- ❖ المعولية المقدرة بطريقة العزوم الخطية $\widehat{\mathbf{R}}_{\mathbf{LMom}}$ حالة كون التوزيع الملوث أسي بمتوسط مربع خطأ تكاملي (IMSE=0.01130) .

جدول ٧: تقديرات دالة المعولية R بجميع الطرائق ومتوسط مربعات الخطأ التكاملي IMSE عند كل حجم عينة عند قيم المعلمات الافتراضية λ=3 و α=3 و k=4 عند n= 25

k=4	α=3		λ=3		k=4	α=3		λ=3	
MLE			Best		LMom(F.Exp)	Mom(F.Exp)	Mle(F.Exp)	Real	N
$\hat{\alpha} = 2.52$ $\hat{\lambda} = 3.41$	$\hat{\alpha} = 2.68$ $\hat{\lambda} = 2.59$	$\hat{\alpha} = 2.35$ $\hat{\lambda} = 2.32$		50	$\hat{\alpha} = 2.78$ $\hat{\lambda} = 3.41$	$\hat{\alpha} = 2.81$ $\hat{\lambda} = 2.59$	$\hat{\alpha} = 2.46$ $\hat{\lambda} = 2.72$		

0.99347	0.95427	0.96611	0.97047		0.98758	0.91139	0.96599	0.97047	25
0.84946	0.84146	0.78629	0.85936		0.81426	0.82383	0.76343	0.85936	
0.59241	0.74035	0.6125	0.75317		0.56088	0.73007	0.6269	0.75317	
0.34078	0.64884	0.46508	0.64795		0.33679	0.63778	0.48474	0.64795	
0.16427	0.56784	0.34676	0.54811		0.18349	0.55517	0.3698	0.54811	
0.06759	0.49756	0.255	0.46262		0.09414	0.48674	0.27989	0.46262	
0.02421	0.42751	0.18552	0.39553		0.04698	0.4321	0.2111	0.39553	
0.01035	0.39858	0.14534	0.35516		0.02784	0.39868	0.17082	0.35516	
0.00304	0.35384	0.10436	0.30988		0.01408	0.36211	0.12908	0.30988	
0.00082	0.31616	0.07456	0.27108		0.00736	0.33265	0.09798	0.27108	
0.08553	0.01142	0.03241	IMSE		0.08137	0.03174	0.03013	IMSE	
Mom			Best		Mom			Best	
$\hat{\alpha} = 2.54$ $\hat{\lambda} = 3.42$	$\hat{\alpha} = 2.57$ $\hat{\lambda} = 2.57$	$\hat{\alpha} = 2.44$ $\hat{\lambda} = 2.53$			$\hat{\alpha} = 2.47$ $\hat{\lambda} = 3.41$	$\hat{\alpha} = 2.76$ $\hat{\lambda} = 2.59$	$\hat{\alpha} = 2.43$ $\hat{\lambda} = 2.32$		
0.99373	0.96476	0.96639	0.97047	100	0.99365	0.96019	0.96666	0.97047	75
0.85456	0.84596	0.78461	0.85936		0.853	0.84342	0.7863	0.85936	
0.60179	0.74087	0.60858	0.75317		0.59909	0.73945	0.6111	0.75317	
0.34818	0.64784	0.4595	0.64795		0.34644	0.64654	0.46235	0.64795	
0.16633	0.56605	0.34015	0.54811		0.16652	0.56463	0.34305	0.54811	
0.06603	0.49461	0.24787	0.46262		0.06732	0.49326	0.25066	0.46262	
0.02195	0.43251	0.17829	0.39553		0.0232	0.43167	0.1809	0.39553	
0.0086	0.39145	0.13824	0.35516		0.00948	0.3913	0.14068	0.35516	
0.00214	0.34323	0.09763	0.30988		0.00256	0.34437	0.09984	0.30988	
0.00046	0.30159	0.06836	0.27108		0.00061	0.30436	0.07034	0.27108	
0.08461	0.00381	0.03348	IMSE		0.08468	0.00686	0.03299	IMSE	
Mom			Best						

يتضح من جدول ٧ عند قيم المعلمات الافتراضية λ و α و نسبة تلوث k=4 وباستعمال المعيار الاحصائي متوسط مربعات الخطأ التكاملي IMSE ولاحجام عنية مختلفة لاختيار افضل تقدير للمعولية للمعولية التقريبية وكالآتي:

١- عند حجم عينة (n=25) و نسبة تلوث (K=4) وقيم معلمات افتراضية $\alpha=3,\ \lambda=3$:

- ❖ المعولية المقدرة بطريقة الامكان الاعظم $\hat{\mathbf{R}}_{\mathbf{Mle}}$ تقترب اكثر من المعولية الحقيقية من طريقة العزوم الخطية $\hat{\mathbf{R}}_{\mathbf{LMom}}$ ومن ثم طريقة العزوم $\hat{\mathbf{R}}_{\mathbf{Mom}}$.
- ❖ المعولية المقدرة بطريقة الامكان الاعظم عندما يكون التوزيع الملوث أسي $\hat{\mathbf{R}}_{\mathbf{Mle(F.Exp)}}$ تمتلك اقل متوسط مربعات خطأ تكاملي (IMSE=0.03013), وتليها طريقة العزوم $\hat{\mathbf{R}}_{\mathbf{Mom}}$ بمتوسط مربعات خطأ تكاملي (IMSE=0.03174) عندما يكون التوزيع الملوث أسي اقل من متوسط مربعات الخطأ التكامل (IMSE=0.03375).

٢- عند حجم عينة (n=50) و نسبة تلوث (K=4) وقيم معلمات افتراضية $\alpha=3,\ \lambda=3$:

- ❖ المعولية المقدرة بطريقة العزوم $\hat{\mathbf{R}}_{\mathbf{Mom}}$ تقترب اكثر من المعولية الحقيقية ثم تليها طريقة الامكان الاعظم $\hat{\mathbf{R}}_{\mathbf{MlE}}$ ومن ثم طريقة العزوم الخطية $\hat{\mathbf{R}}_{\mathbf{LMom}}$.
- ❖ المعولية المقدرة بطريقة العزوم عندما يكون التوزيع الملوث أسي $\hat{\mathbf{R}}_{\mathbf{Mom(F.Exp)}}$ تمتلك اقل متوسط مربعات خطأ تكاملي IMSE=0.01142, وتليها طريقة الامكان الاعظم بمتوسط مربعات خطأ تكاملي (IMSE=0.03241) عندما يكون التوزيع الملوث أسي اقل من متوسط مربعات الخطأ التكامل(IMSE=0.07932).

٣- عند حجم عينة (n=75) و نسبة تلوث (K=4) وقيم معلمات افتراضية $\alpha=3,\ \lambda=3$:

- ❖ المعولية المقدرة بطريقة العزوم $\hat{\mathbf{R}}_{\mathbf{Mom}}$ تقترب اكثر من المعولية الحقيقية ثم تليها طريقة الامكان الاعظم $\hat{\mathbf{R}}_{\mathbf{MlE}}$ ومن ثم طريقة العزوم الخطية $\hat{\mathbf{R}}_{\mathbf{LMom}}$.
- ❖ المعولية المقدرة بطريقة العزوم عندما يكون التوزيع الملوث أسي $\hat{\mathbf{R}}_{\mathbf{Mom(F.Exp)}}$ تمتلك اقل متوسط مربعات خطأ تكاملي (IMSE=0.00686), وتليها طريقة الامكان الاعظم بمتوسط مربعات خطأ تكاملي (IMSE=0.03299) عندما يكون التوزيع الملوث أسي $\hat{\mathbf{R}}_{\mathbf{Mle(F.Exp)}}$ اقل من متوسط مربعات الخطأ التكامل(IMSE=0.07861) .

٤- عند حجم عينة (n=100) و نسبة تلوث (K=4) وقيم معلمات افتراضية $\alpha=3,\ \lambda=3$:

- ❖ المعولية المقدرة بطريقة العزوم $\widehat{\mathbf{R}}_{\mathbf{Mom}}$ تقترب اكثر من المعولية الحقيقية ثم تليها طريقة الامكان الاعظم $\widehat{\mathbf{R}}_{\mathbf{MlE}}$ ومن ثم طريقة العزوم الخطية $\widehat{\mathbf{R}}_{\mathbf{LMom}}$.
- ❖ المعولية المقدرة بطريقة العزوم عندما يكون التوزيع الملوث أسي $\widehat{\mathbf{R}}_{\mathbf{Mom(F.Exp)}}$ تمتلك اقل متوسط مربعات خطأ تكاملي (IMSE=0.00381), وتليها طريقة الامكان الاعظم بمتوسط مربعات خطأ تكاملي (IMSE=0.03348) عندما يكون التوزيع الملوث أسي $\widehat{\mathbf{R}}_{\mathbf{Mle(F.Exp)}}$ اقل من متوسط مربعات الخطأ التكامل(IMSE=0.00403).

جدول ٨: يبين نسبة الافضلية لطرائق تقدير دالة المعولية باستخدام المقياس الإحصائي (IMSE)

طريقة التقدير	عدد مرات الأفضلية	النسبة
$Mle(F.Exp)$	34	0.34
$Mom(F.Exp)$	16	0.16
$LMom(F.Exp)$	0	0.0

وما يلي بعض منحنيات دالة المعولية المقدرة بالطرائق المختلفة عند قيم نسب التلوث المختلفة عند كل احجام العينات المفترضة

البيانات التطبيقية

يمثل جهاز الماموجرام احد الاجهزة الطبية المتطورة المستخدم للكشف عن سرطان الثدي عند النساء، ويوجد في مستشفى الهندية العام التابعة لمحافظة كربلاء جهاز ماموجرام واحد متطور يقدم الخدمة للمواطنين, ونظراً للزخم الحاصل على الجهاز يتعرض الجهاز الى عطلات فنية وكهربائية مستمرة تستدعي استدعاء الخبراء الفنين لغرض صيانة الجهاز وتفعيل استمرارية بالعمل.. تم الحصول على بيانات من المختصين العاملين على الجهاز والمهندسين المشرفين ومن ادارة المستشفى عن فترات اشتغال الجهاز لحين التوقف عن العمل (اوقات فشل) مع اوقات لاتمثل اوقات فشل في عمل الجهاز وانما اوقات لغرض اعطاء راحة لعمل الجهاز وبذلك فان بيانات اوقات الفشل قد لوثت ببيانات غير البيانات الحقيقية للفشل، وقد رتبت هذه الاوقات t_i في الجدول ٩ مقاسة بالاشهر وللمده من بداية نصب الجهاز في المستشفى ولحد نهاية سنة ٢٠١٨ وكالاتي:

جدول٩: مدد تشغيل جهاز الماموجرام لحين التوقف عن العمل بالاشهر

i	t_i	i	t_i	i	t_i	i	t_i	i	t_i	i	t_i
1	0.9	11	.1٠	21	2.6	31	0.5	41	0.6	51	0.5
2	0.2	12	.1٠	22	0.8	32	0.6	42	0.1	52	0.6
3	0.9	13	.1١	23	0.9	33	0.7	43	0.2	53	0.8
4	0.6	14	.1١	24	1.0	34	0.8	44	0.3	54	1.7
5	0.4	15	2.2	25	0.1	35	0.8	45	1.5	55	0.5
6	1.7	16	1.1	26	1.3	36	0.9	46	0.8	56	1.4
7	1.8	17	2.4	27	0.3	37	0.1	47	0.8	57	1.6
8	0.2	18	1.4	28	0.3	38	1.2	48	0.9	58	1.6
9	0.9	19	0.9	29	0.4	39	0.5	49	0.1	59	1.9
10	0.2	20	0.2	30	0.5	40	.5٠	50	0.3	60	1.4

جدول١٠: اوقات توقف عمل الجهاز المتعمدة

t_i	0.2	0.2	0.3	0.1	0.3	0.2	0.2	0.1	0.3	0.4
i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10

اختبار ملائمة البيانات

تم اختبار البيانات باستعمال برنامج easy fit للتاكد من كونها تتبع التوزيعات المدروسة ام لا كالآتي:

- ❖ اختبار البيانات التي تمثل اوقات الفشل لجهاز الماموجرام وكانت نتائج الاختبار كالاتي:

H_0: البيانات تتبع توزيع فريجت

H_1: البيانات لا تتبع توزيع فريجت

وكانت نتائج الاختبار كما في الجدول ١١.

جدول ١١: نتائج اختبار البيانات الحقيقة لاوقات الفشل لجهاز الماموجرام

No.	Distribution	Kolmogorov- Smirnov	Anderson Darling	Sig.
		Statistic	Statistic	

1	Frechet	0.23005	0.56727	0.4092

حيث يتضح من جدول١٢ ان قيمة .Sig والبالغة (0.4092) اكبر من مستوى المعنوية ٠.٠٥ لذلك لانرفض فرضية العدم اي ان البيانات تتبع توزيع فريجت .

❖ اختبار البيانات التي تمثل اوقات الراحة لجهاز الماموجرام وكانت نتائج الاختبار كالاتي:

❖ H_0: البيانات تتبع التوزيع الاسي

❖ H_1:البيانات لاتتبع التوزيع الاسي

جدول ١٢: نتائج اختبار البيانات الحقيقة لاوقات توقف جهاز الماموجرام

No.	Distribution	Kolmogorov- Smirnov	Anderson Darling	Sig.
		Statistic	Statistic	
1	Exponential	0.25481	0.79808	0.4083

حيث يتضح من جدول ١٢ أن قيمة .Sig والبالغة (0.4083) للتوزيع الاسي وكذلك قيمة .Sig والبالغة (2.5018) لتوزيع ويبل اكبر من مستوى المعنوية ٠.٠٥ لذلك لانرفض فرضية العدم اي ان البيانات تتبع التوزيع الاسي او توزيع ويبل

تحليل البيانات

بينت نتائج تجارب المحاكاة ان افضل طريقة لتقدير دالة المعولية هي الامكان الاعظم , لذلك سيتم تطبيق هذه الطريقة على البيانات الحقيقية لقياس معولية جهازم الماموجرام , وباستعمال برنامج Mat lab تم انشاء برنامج خاص لتطبيق الطريقة وكانت النتائج كالاتي :

جدول ١٣: يبين البيانات الحقيقية والمعلوية المقدرة بطريقة الامكان الاعظم عند نسبة تلوث K=2

t_i	قيم المعولية المقدرة بطريقة الامكان الاعظم R_i	t_i	قيم المعولية المقدرة بطريقة الامكان الاعظم R_i	t_i	قيم المعولية المقدرة بطريقة الامكان الاعظم R_i
2.6	0.81	0.9	0.33	0.5	0.14
2.4	0.75	0.9	0.32	0.5	0.14
2.2	0.74	0.9	0.32	0.5	0.13
1.9	0.72	0.9	0.31	0.4	0.12
1.8	0.71	0.9	0.31	0.4	0.12
1.7	0.61	0.9	0.31	0.3	0.08
1.7	0.51	0.8	0.31	0.3	0.07
1.6	0.51	0.8	0.3	0.3	0.07
1.6	0.51	0.8	0.3	0.3	0.06
1.5	0.51	0.8	0.3	0.2	0.06
1.4	0.49	0.8	0.29	0.2	0.06
1.4	0.48	0.8	0.27	0.2	0.05
1.4	0.46	0.7	0.22	0.2	0.05
1.3	0.46	0.6	0.21	0.2	0.03
1.2	0.46	0.6	0.21	0.1	0.03
1.1	0.43	0.6	0.21	0.1	0.02
1.1	0.41	0.6	0.21	0.1	0.02
1.1	0.38	0.5	0.21	0.1	0.01
1	0.35	0.5	0.14	0.1	0.01

0.9	0.34	0.5	0.14	0.1	0.01

جدول ١٤: يبين البيانات الحقيقية والمعلوية المقدرة بطريقة الامكان الاعظم عند نسبة تلوث K=4

t_i	قيم المعولية المقدرة بطريقة الامكان الاعظم R_i	t_i	قيم المعولية المقدرة بطريقة الامكان الاعظم R_i	t_i	قيم المعولية المقدرة بطريقة الامكان الاعظم R_i
0.9	0.92	2.6	0.34	0.6	0.11
0.2	0.91	0.9	0.33	0.1	0.11
0.9	0.87	0.8	0.33	0.2	0.08
0.6	0.77	1	0.32	1.5	0.07
0.4	0.76	0.1	0.31	0.3	0.07
1.7	0.71	1.3	0.3	0.9	0.06
1.8	0.66	0.3	0.3	0.8	0.06
0.2	0.65	0.3	0.29	0.8	0.06
0.9	0.63	0.4	0.27	0.5	0.05
0.2	0.6	0.5	0.23	0.3	0.05
٠.١	0.56	0.5	0.22	0.1	0.05
٠.١	0.55	0.7	0.21	1.7	0.03
١.١	0.51	0.6	0.21	0.8	0.03
١.١	0.49	0.8	0.19	0.6	0.03
2.2	0.46	0.8	0.18	1.4	0.02
1.1	0.46	0.9	0.17	0.5	0.02
2.4	0.43	1.2	0.14	1.9	0.01
1.4	0.41	0.1	0.14	1.6	0.01
0.9	0.38	0.5	0.12	1.6	0.01
0.2	0.35	٠.٥	0.12	1.4	0.01

ويتضح من الجدول ١٢ و ١٣ ان المعولية التقريبية المقدرة بطريقة الامكان الاعظم في حالة التوزيع اسي تتزايد بزيادة نسب تلوث البيانات , هذا يدل على ان اعطاء فترات توقف متعمدة للجهاز وليس اوقات فشل عمل الجهاز من قبل المختصين والقائمين على الجهاز يزيد من معولية الجهاز.

٤ الاستنتاجات

من خلال ما تم التوصل اليه من نتائج في الجانبين التجريبي والتطبيقي توصلنا الى الاستنتاجات الاتية :

١- افضل طريقة لتقدير دالة المعولية التقريبية في ظل وجود بيانات ملوثة هي طريقة الامكان الاعظم بنسبة افضلية ٣٤ % عندما يكون التوزيع الملوث اسي, تليها طريقة العزوم بنسبة افضلية ١٦% عندما يكون التوزيع الملوث اسي, ثم طريقة العزوم الخطية بنسبة افضلية ٠% لكلا التوزيعين الملوثين.

٢- المعولية المقدرة بطريقة الامكان الاعظم عندما يكون التوزيع الملوث أسي تمتلك اقل متوسط مربعات خطأ تكاملي (IMSE) ولكن الفارق قليل جداً لكل تجارب المحاكاة .

٣- المعولية المقدرة بطريقة الامكان الاعظم $\hat{R}_{Mle}$ تقترب اكثر من المعولية الحقيقية من طريقة العزوم $\hat{R}_{Mom}$ وطريقة العزوم الخطية $\hat{R}_{LMom}$.

٤- سجلت طريقة العزوم افضلية عن باقي الطرائق لبعض تجارب المحاكاة

٥- عدم ملائمة طريقة العزوم الخطية لتقدير دالة المعولية التقريبية في ظل وجو بيانات ملوثة حيث ان الطريقة لم تسجل اي تفوق في جميع تجارب المحاكاة.
٦- طريقة الامكان الاعظم اكثر ملائمة للبيانات الحقيقية التي تمثل اوقات الفشل لجهاز الماموجرام .
٧- تتزايد المعولية التقريبة لجهاز الماموجرام عند تناقص نسب التلوث التي تمثل اوقات التوقف المتعمدة لعمل جهاز الماموجرام.
٨- منحنيات دالة المعولية التقريبية المقدرة بطريقة الامكان الاعظم للبيانات الحقيقية تقترب من المعولية الحقيقة .

٥ التوصيات

من خلال ما تم التوصل اليه من استنتاجات ، نوصي بالاتي :
١- تلوث البيانات قد يكون مفيد في بعض الاحيان ففي حالة البيانات الحقيقة تم ملاحظة ان اوقات التوقف المتعمدة لجهاز الماموجرام قد ادت ال ارتفاع معولية الجهاز .
٢- مقارنة الطريقة المستخدمة في هذه الرسالة مع الطرائق الحصينة التي استخدمت في حالة البيانات الملوثة .
٣- التوسع في استعمال توزيعات اخرى غير توزيع فريچت في حالة وجود بيانات ملوثة , وكذلك استعمال توزيعات اخرى غير التوزيع الاسي كتوزيعات ملوثة للتوزيع الاصلي للبيانات.
٤- استعمال التقدير البيزي ومقارنته مع التقدير الكلاسيكي في حالة وجود بيانات ملوثة.

المصادر

الياسري ، تهاني مهدي عباس ،(٢٠٠٧) ، " مقارنة مقدرات بيز الحصين مع مقدرات أخرى لتقدير دالة المعولية التقريبية لتوزيع ويبل" ، اطروحة دكتوراه ، كلية الادارة والاقتصاد- جامعة بغداد .

هبة الله،و ماجد علي شريم، (٢٠٠٥) ، " دراسة مقارنة لطرق التقدير الحصينة لدالة البقاء مع تطبيق عملي على مرضى سرطان الدم في اليمن " , اطروحة دكتوراه - كلية الادارة والاقتصاد- جامعة بغداد .

بشار خالد علي (٢٠١٨) ، "اختيار افضل تقدير للمعولية الضبابية لتوزيع فريچت " ، رسالة ماجستيرغير منشورة، جامعة كربلاء، كلية الادارة والاقتصاد .

Dixit ,Ulhas J. , (1989), " estimation of parameters of the gamma distribution in the presence of oijtlzers' , commun. Statist.-theory meth., 1 8 (8) , 3071-3085

Nasiri, Parviz; Pazira , Hassan. (2010) , " Bayesian Approach on the Generalized Exponential Distribution in the Presence of Outliers, Journal of Statistical Theory and Practice Volume 4, No. 3

Hekimoglu ,SerifR.; Erenoglu , Cuneyt , (2013) , " A new GM-estimate with high breakdown point" , Acta Geod Geophys 48:419–437 DOI 10.1007/s40328-013-0029

Obikee, Adaku C., Ebuh; Godday U., Happiness; Obiora-Ilouno, (2014) , "Comparison of Outlier Techniques Based on Simulated Data", Open Journal of Statistics, 2014, 4, 536-561 Published Online August 2014 in SciRes. http://www.scirp.org/journal/ojs http://dx.doi.org/10.4236/ojs.2014.47051

Iyer , Ravi K., (2013) , " Hazard and Reliability Functions,Failure Rates" , Probability with Engineering Applications, Dept. of lectrical and Computer Engineering University of Illinois at Urbana Champaign, ECE 313.

Rousseau, Gilles,(2016), " Vieillissement du TRIAC soumis à des essais de fiabilité du type HTRB" , HAL Id: dumas-01803690 https://dumas.ccsd.cnrs.fr/dumas-01803690

Stapelberg , Rudolph Frederick, (2009) , " Handbook of Reliability, Availability, Maintainability and Safety in Engineering Design ", Springer, British Library Cataloguing in Publication Data, DOI 10.1007/978-1-84800-175-6.

Kersey, Jing Xiong, (2010), " Weighted Inverse Weibull and Beta-Inverse Weibull Distribution", https://digitalcommons.georgiasouthern.edu/etd Part of theMathematics Commons .

A.LOGANATHAN ; M.UMA, (2017), " COMPARISON OF ESTIMATION METHODS FOR INVERSE WEIBULL PARAMETERS" , Global and Stochastic Analysis Vol. 4 No. 1, , 83-93

Kundua, Debasis; Howlader, Hatem, (2010) , " Bayesian inference and prediction of the inverse Weibull distribution for Type-II censored data , Computational Statistics and Data Analysis 54 (2010) 1547_1558 .

Ross, Sheldon M., (2009) , " INTRODUCTION TO PROBABILITY and STATISTICS FOR ENGINEERS AND SCIENTISTS" , Fourth Edition, Academic Press is an imprint of Elsevier .